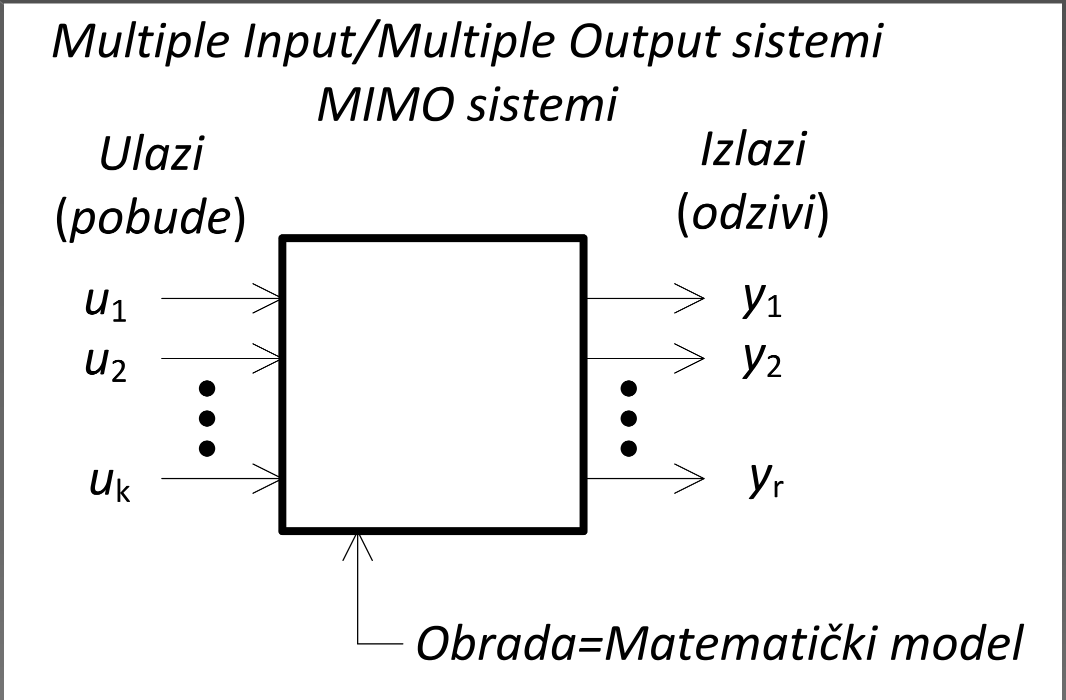
TEORIJA SIGNALA I INFORMACIJA

Studijski program: Primijenjeno računarstvo

II termin

Dr Nevena Radović

Sistemi



- Načini realizacije: fizički sistemi (hardware) i algoritmi (software)
- Proces realizacije: matematičko modeliranje, analiza, sinteza

Klasifikacija sistema

- Linearni i nelinearni
- Sistemi sa konstantnim i sistemi sa promjenljivim parametrima (veže se za vremensku invarijantnost)
- Sistemi bez memorije i sistemi sa memorijom (kombinovana i sekvencijalna kola)
- Kauzalni i nekauzalni sistemi (odziv poslije i prije pobude)
- Sistemi sa koncentrisanim i sistemi sa raspoređenim parametrima
- Kontinualni i diskretni sistemi (po vremenu)
- Analogni i digitalni sistemi

Linearni sistemi

- Osobine linearnih sistema:

- **Aditivnost**:

  $u_1 \rightarrow y_1$, $u_2 \rightarrow y_2$ povlači da je $u_1+u_2 \rightarrow y_1+y_2$
- **Homogenost:**

  $u \rightarrow y$ povlači da je $ku \rightarrow ky$

- **Aditivnost+homogenost** → superpozicija (njome se ispituje linearnost sistema)

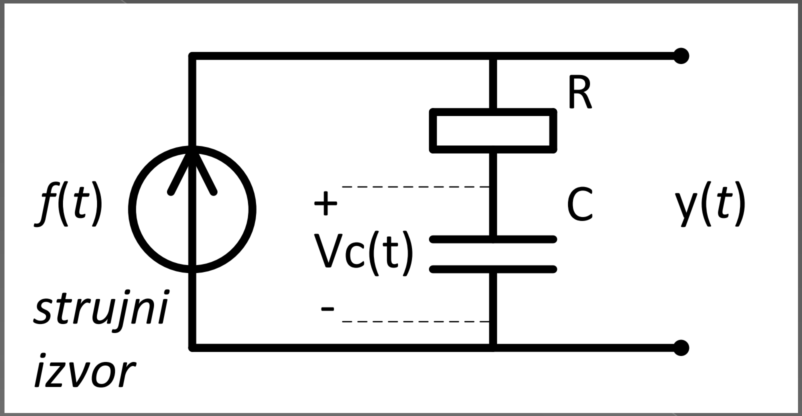
  $k_1u_1+k_2u_2 \rightarrow k_1y_1+k_2y_2$

Odziv linearnog sistema

- Posmatrajmo Single Input/Single Output sistem (SISO sistem). Odziv (izlaz) sistema je rezultat dva uzroka:
  - Početnih uslova sistema u t=0
  - Pobude (ulaza) sistema $f(t)$ za $t \geq 0$
- Za linearne sisteme, odziv (izlaz) mora biti zbir dvije komponente izazvane ovim uzrocima.
  - Sopstveni (autonomni, slobodni) odziv = Zero-input response
  - Prinudni odziv = Zero-state response

Odziv linearnog sistema

- Odziv prostog RC kola:



$$y(t)=Rf(t)+\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{C}f(\tau)\mathrm{d}\tau=Rf(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0}f(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{C}\int_{0}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=V_c(0)+Rf(t)+\frac{1}{C}\int_{0}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$y(\mathrm{t})=\underset{\textit{sopstveni odziv}}{V_c(0)}+\underbrace{Rf(t)+\frac{1}{C}\int_{0}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau}_{\textit{prinudni odziv}}$$

← Osobina dekompozicije

Linearni sistemi

- Odziv linearnog sistema se može računati kroz nezavisno određivanje dvije komponente (sopstvenog i prinudnog odziva) zahvaljujući osobini dekompozicije.
- Svi sistemi su u principu nelinearni u nekom opsegu (za pobudne signale dovoljno dugog trajanja)
- Princip superpozicije je moćan alat za izvođenje zaključaka i uprošćavanje analize i sinteze
- Ako se ulaz $f(t)$ predstavi kao suma prostih funkcija $f_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$, tada na osnovu superpozicije:

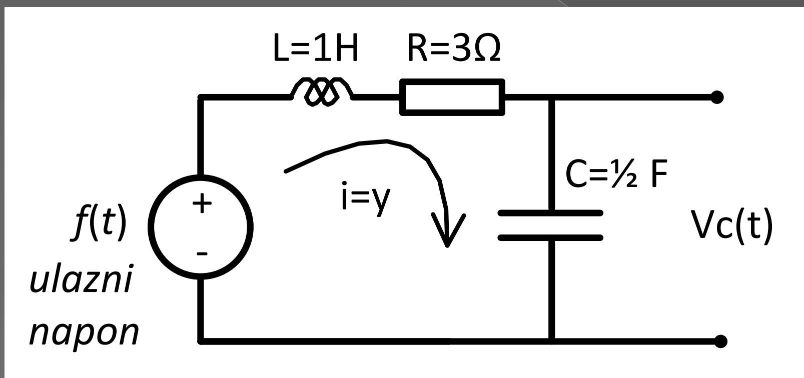
$$f(t)=a_1 f_1(t)+\ldots+a_m f_m(t) \Rightarrow y(t)=a_1 y_1(t)+\ldots+a_m y_m(t)$$

Opis sistema ulaz-izlaz

- Prvi korak u analizi sistema je pravljenje **modela sistema** (matematički iskaz ili pravilo koje zadovoljavajuće aproksimira ponašanje sistema).
- Za pravljenje modela neophodno je proučiti zavisnosti među različitim promjenljivima u sistemima.
- Najčešće se sistem opisuje odnosom **ulaz-izlaz**, odnosno odnosom pobude i odziva (npr. ulaza električnog kola i napona na izlazu).

Opis sistema ulaz-izlaz

- Posmatrajmo električno kolo kod koga je *f*(*t*) ulazni napon, a *y*(*t*) izlazna struja:



$$L\frac{dy}{dt}+Ry+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(t)dt=f(t)\ \Big/\ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y(\mathrm{t})=\frac{df}{dt}$$

$$(D^2+3D+2)y(t)=Df(t),\ \text{gdje je } D=\frac{d}{dt}\ \text{operator}$$

Analiza kontinualnih sistema u vremenskom domenu

- Linearni sistem, može u opštem slučaju biti, opisan diferencijalnim jednačinama (linearni diferencijalni sistem):

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_0 y=b_m\frac{d^m f}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\ldots+b_0 f(t) \qquad (1)$$

odnosno:

$$Q(D)y(t)=P(D)f(t)$$

gdje su *Q* i *P* polinomi operatora prvog izvoda *D*, a *m*≤*n*

- Stoga je:

Ukupni odziv= Sopstveni odziv + Prinudni odziv

Sopstveni odziv sistema

- Neka je $y_0(t)$ rješenje jednačine (1) za $f(t)=0$. Tada je:

$$Q(D)y_0(t)=0 \qquad (2)$$

odnosno:

$$(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+...+a_1D+a_0)y_0(t)=0$$

- Rješenje date jednačine je eksponencijalna funkcija:

$$y_0(t)=Ce^{\lambda t}$$

$$Dy_0(t)=C\lambda e^{\lambda t}$$

$$...$$

$$D^n y_0(t)=C\lambda^n e^{\lambda t}$$

$$C(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0)e^{\lambda t}=0$$

Sopstveni odziv sistema

- Netrivijalna rješenja prethodnih jednačina:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad (3)$$

- Dakle, ako je zadovoljena jednačina (3), znači da je rješenje jednačine (2): ***Ce^λt***
- Vidimo da je jednačina (3) u stvari: **Q(λ)=0**, te je stoga ***karakteristična*** jednačina.

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

- Očigledno, λ ima n rješenja: λ_1, λ_2, λ_3,...., λ_n, a to znači da (2) ima također *n* mogućih rješenja:

$$C_1 e^{\lambda_1 t}, C_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, C_n e^{\lambda_n t}$$

Sopstveni odziv sistema

- C_1, C_2,...,C_n proizvoljne konstante. Opšte rješenje u ovom slučaju se dobija kao zbir ovih *n* rješenja.
- Opšte rješenje za **sopstveni odziv**:

$$y_0(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + ... + C_n e^{\lambda_n t}, \quad C_i \text{ je proizvoljna konstanta}$$

- C_i se određuju iz početnih uslova.
- **Q(λ)** je karakteristični polinom;
- **Q(λ)=0** je karakteristična jednačina;
- $\boldsymbol{\lambda_i}$ su karakteristične (sopstvene) vrijednosti;
- $\boldsymbol{e^{\lambda t}}$ su karakteristični modovi.

Kompleksni korjeni

- U realnim sistemima Q(λ) kompleksne sopstvene (karatkteristične) vrijednosti a+jβ moraju imati svoj konjugovano-kompleksni par a-jβ (da bi se postigla realnost sistema).

$$y_0(t) = C_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + C_2 e^{(\alpha - j\beta)t}$$

- Zato C_1 i C_2 moraju biti konjugovano-kompleksni:

$$C_1 = \frac{C}{2} e^{j\theta}; \quad C_1 = \frac{C}{2} e^{-j\theta}$$

Kompleksni korjeni

- Dalje je:

$$y_0(t) = \frac{C}{2} e^{j\theta} e^{(\alpha + j\beta)t} + \frac{C}{2} e^{-j\theta} e^{(\alpha - j\beta)t} =$$
$$= \frac{C}{2} e^{\alpha t} [e^{j(\beta t + \theta)} + e^{-j(\beta t + \theta)}]$$

odnosno:

$$y_0(t) = Ce^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$$ → realna funkcija